

Probabilidad

MEDIR LA INCERTIDUMBRE DE UN SUCESO





El concepto de probabilidad

Probabilidad y porcentajes

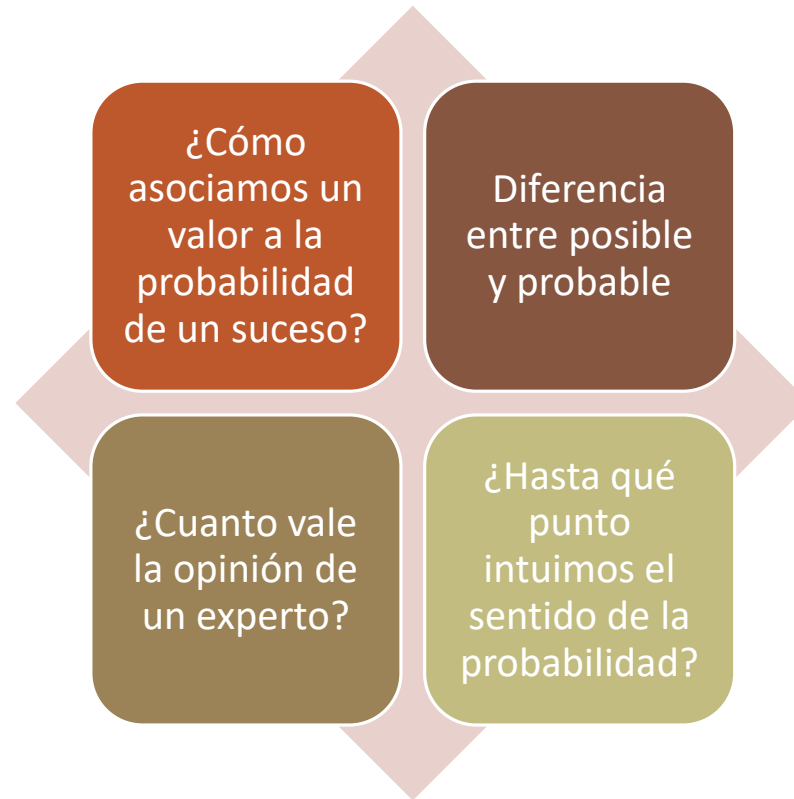
Aprender las reglas básicas de cálculo

Ser capaces de identificar los componentes principales de un criterio diagnóstico

Utilizar el teorema de Bayes para emitir un diagnóstico

Relacionar el teorema de Bayes con el diagnóstico automático

Algunos aspectos clave



El concepto de probabilidad

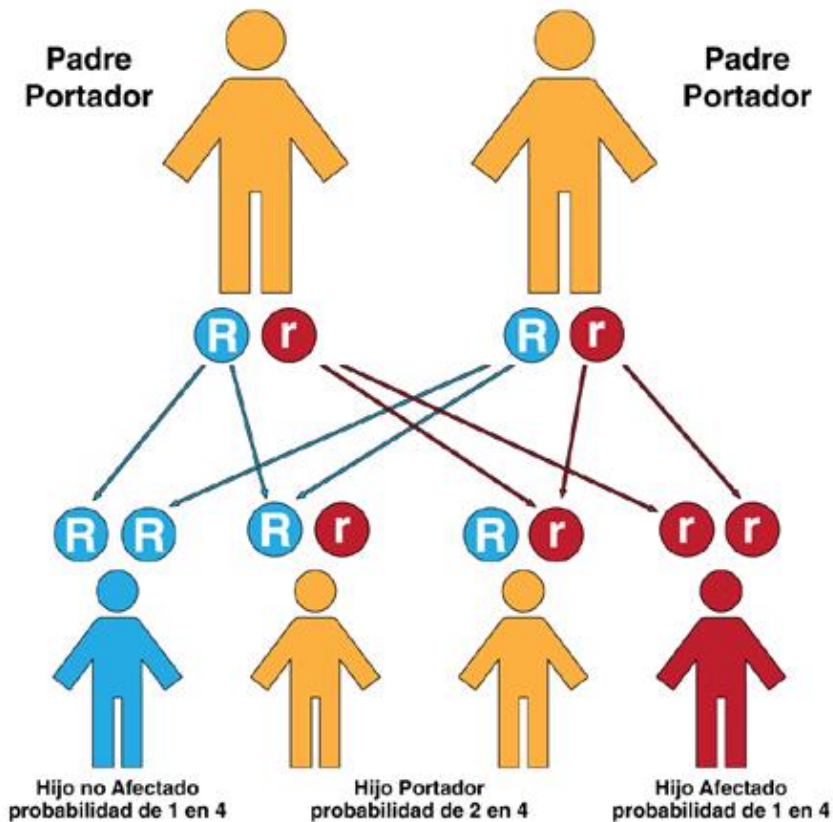
La probabilidad es una medida de la incertidumbre acerca de un suceso.

La probabilidad de un suceso está entre 0 y 1.

La frecuencia relativa de un suceso en una muestra se acerca al valor de la probabilidad cuando la muestra aumenta de tamaño.

Si un suceso, p.e. coger la gripe, tiene una probabilidad p , en una muestra de n individuos esperamos que $n \cdot p$ individuos presenten el suceso.

[simulación](#)



El concepto de probabilidad



CUANDO ADMINISTRAMOS UN TRATAMIENTO, ¿QUÉ PORCENTAJE DE MEJORAS ESPERAMOS?



¿HASTA QUÉ PUNTO ESTÁN ASOCIADOS LA HIPERTENSIÓN Y LAS ENFERMEDADES CARDIOVASCULARES?



¿CÓMO PODEMOS INTERPRETAR EL CONCEPTO DE FACTOR DE RIESGO?



¿EL RIESGO DE ENFERMEDAD CARDIOVASCULAR ES MÁS ELEVADO EN LOS HOMBRES?

El concepto de probabilidad



¿Qué probabilidad existe de que una pareja tenga un hijo hemofílico?



¿Si mi nivel de colesterol es elevado, que probabilidad existe de que tenga un infarto?



¿Hasta qué punto el ejercicio físico disminuye dicha probabilidad?



¿Qué es más probable que ocurra: un accidente de avión o una intoxicación por salmonela?



¿Porqué insisten en la prohibición de fumar?
Total, hay mucha gente mayor sana y fumadora.



El concepto de probabilidad

En general, no estamos entrenados para manejar el concepto de probabilidad

¿Porqué, en el sorteo de Navidad, decimos que el número 23754 es un número bonito y nadie se arriesga a comprar el 12345?

¿Porqué nos preocupamos cuando viajamos en avión y cogemos cada día tranquilamente el coche?

¿Porqué nos parece increíble que nunca nos toque la primitiva?

Si las estadísticas mostrasen que la mortalidad por tuberculosis es mayor en Segovia que en las demás provincias, ¿significaría esto que el clima segoviano favorece el contagio tuberculoso?

El concepto de probabilidad en medicina



Caracterizar el porcentaje de mejoras en un tratamiento



Caracterizar la incidencia de una enfermedad y de sus complicaciones



Evaluar una campaña de vacunación



Evaluar riesgos (riesgo relativo, riesgo atribuible)



Identificar factores de riesgo (hipertensión, hiperuricemia, hipercolesterolemia,...)



Evaluar síntomas y emitir diagnósticos



Diseñar criterios diagnóstico

Definición de probabilidad

Dado un suceso A , su probabilidad se define como:

$$P(A) = p \in [0,1]$$

Propiedades básicas:

- $P(A) \geq 0$
- Si $A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\Omega) = 1$

Definición de probabilidad

Propiedades básicas:

- $P(A) \geq 0$
- Si $A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

La probabilidad como medida de la incertidumbre de un suceso

- La probabilidad es una medida de la incertidumbre de un suceso.

- Si el suceso A es más probable que el suceso B , entonces
$$P(A) > P(B)$$

- Si un suceso forma parte de otro (inclusión) entonces su probabilidad es menor que las del suceso que lo incluye:

$$P(H \cap D \cap A) \leq P(H \cap D) \leq P(D)$$

Probabilidad condicionada



¿Qué vale la probabilidad de padecer una enfermedad cardiovascular?



¿Podemos indicar un valor absoluto para la probabilidad?



¿Hasta qué punto depende de otros factores?



¿Cómo podríamos formalizar esta idea?

Algunas situaciones de interés



Si una persona da positivo en la prueba del VIH, ¿qué vale la probabilidad de que esté infectada por el VIH?



Si un hombre no tiene cáncer de próstata, ¿qué probabilidad tiene de que la prueba PSA (antígeno específico de próstata) dé resultados negativos?

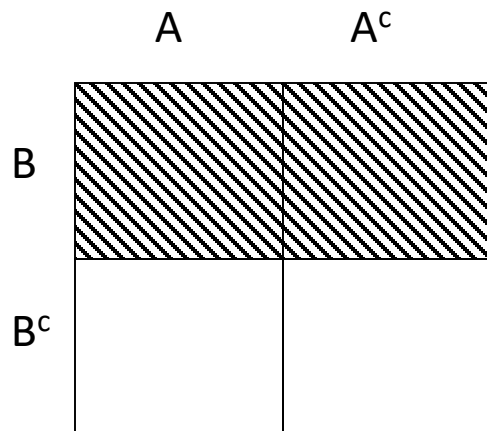


Si una mamografía sale negativa, ¿Cuánto vale la probabilidad de que la persona tenga cáncer?

Probabilidad condicionada

Definición:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



$P(A/B)$:

Probabilidad de que suceda A
si consideramos que estamos en B

Explicación intuitiva:

$$P(A/B) \xrightarrow{\text{Estimación}} \frac{N_{A \cap B}}{N_B} = \frac{N_{A \cap B} / N}{N_B / N} \rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

En una població gran, els individus es van classificar segons l'hàbit tabàquic i la presència de problemes respiratoris. El 5% dels individus tenia problemes respiratoris i eren no fumadors, un 15% eren fumadors i tenien problemes respiratoris, el 50% no tenien problemes respiratoris i eren no fumadors i el 30% no tenien problemes respiratoris i eren fumadors:

Relació entre problemes respiratoris (PR) i hàbit tabàquic

	No fumadors	Fumadors	Total
NoPR	0.5	0.3	0.8
PR	0.05	0.15	0.2
Total	0.55	0.45	1

- $P(R|S)$: probabilitat de tenir problemes respiratoris condicionat a fumar

$$\frac{P(R \cap S)}{P(S)} = 0.15/0.45 = 1/3$$

- $P(\bar{R}|S)$: probabilitat de no tenir problemes respiratoris condicionat a fumar

$$\frac{P(\bar{R} \cap S)}{P(S)} = 0.30/0.45 = 2/3$$

Exemple

Relació entre els resultats d'un escàner i el diagnòstic correcte. Altman D. BMJ 1994.

Resultats de l'escàner (files) versus anatomia patològica (AP, columnes)

	Anormal (AP)	Normal (AP)	Total
Anormal	231	32	263
Normal	27	54	81
Total	258	86	344

Com és de bo l'escàner per al diagnòstic de resultats anormals en l'anatomia patològica?

Quines són les proporcions de pacients classificats correctament per l'escàner?

Probabilidad condicionada

Definición:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Consecuencias:

- En general: $P(A/B) \neq P(A)$
- Si $P(A/B) = P(A) \Rightarrow A$ y B son independientes
- $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A)$
- Si A y B son independientes $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Ejemplo (diseño transversal)

En una encuesta a 125 Hombres con una actividad física moderada se recoge el tipo de dieta que siguen habitualmente y se determina su IMC clasificándolos como obesos o normales.

	Obeso	Normal	Total
Dieta grasa	32	18	50
Dieta normal	22	53	75
Total	54	71	125

$$P(O | DG) = 32/50 = 0.64$$

$$P(O | DN) = 22/75 = 0.29$$

$$P(DG | O) = 32/54 = 0.59$$

$$P(DG | N) = 18/71 = 0.25$$

Riesgo relativo: ¿Cómo aumenta la probabilidad de ser obeso en función de la dieta?

$$RR = \frac{P(O|DG)}{P(O|DN)} = \frac{0.64}{0.29} = 2.21$$

Una persona que sigue una dieta grasa tendría el doble de probabilidades de ser obesa, pero.....

Ejemplo (diseño caso-control)

En un estudio se seleccionan personas obesas y personas con peso normal. Se pregunta qué tipo de tipo de dieta siguen habitualmente.

	Obeso	Normal	Total
Dieta grasa	32	18	50
Dieta normal	22	53	75
Total	54	71	125

$$P(O | DG) = \text{error}$$

$$P(O | DN) = \text{error}$$

$$P(DG | O) = 32/54 = 0.59$$

$$P(DG | N) = 18/71 = 0.25$$

Riesgo relativo: No se puede calcular

Odds: Cociente de la probabilidad de observar un suceso respecto a la de no observarlo

$$Odds = \frac{p}{1 - p}$$

Ejemplo (diseño caso-control)

En un estudio se seleccionan personas obesas y personas con peso normal. Se pregunta qué tipo de tipo de dieta siguen habitualmente.

	Obeso	Normal	Total
Dieta grasa	32	18	50
Dieta normal	22	53	75
Total	54	71	125

$$P(O | DG) = \text{error}$$

$$P(O | DN) = \text{error}$$

$$P(DG | O) = 32/54 = 0.59$$

$$P(DG | N) = 18/71 = 0.25$$

$$\frac{P(DG|O)}{P(DN|O)} = \frac{32/54}{22/54} = 1.45$$

$$\frac{P(DG|N)}{P(DN|N)} = \frac{18/71}{53/71} = 0.34$$

Ejemplo (diseño cohortes)

En un estudio experimental un grupo de ratones son alimentados con una dieta rica en grasa. En otro grupo, los ratones siguen una dieta normal. Al finalizar el estudio se determina si han desarrollado obesidad.

	Obeso	Normal	Total
Dieta grasa	32	18	50
Dieta normal	22	53	75
Total	54	71	125

$$P(O | DG) = 32/50 = 0.64$$

$$P(O | DN) = 22/75 = 0.29$$

$$P(DG | O) = \text{error}$$

$$P(DG | N) = \text{error}$$

Riesgo relativo: ¿Cómo aumenta la probabilidad de ser obeso en función de la dieta?

$$RR = \frac{P(O | DG)}{P(O | DN)} = \frac{0.64}{0.29} = 2.21$$

Una persona que sigue una dieta grasa tendría el doble de probabilidades de ser obesa, pero.....

Probabilidad condicionada



	V	V ^c
G	/	
G ^c		

El 60% de una población se ha vacunado contra la gripe. Al cabo de ese año, un 40% de las personas habían enfermado de gripe. ¿Qué porcentaje de personas vacunadas se infecta?

$$\begin{aligned}P(V) &= 0.6 \\ P(G) &= 0.4 \\ \text{¿}P(G/V)\text{?}\end{aligned}$$

$$P(G/V) = \frac{P(G \cap V)}{P(V)}$$

$$\left. \begin{aligned}P(G \cap V) &\leq P(G) = 0.4 \\ P(G \cap V) &\leq P(V) = 0.6\end{aligned} \right\} \Rightarrow P(G/V) = \frac{P(G \cap V)}{P(V)} \begin{cases} 0 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{cases} = 0.67$$

Factor de riesgo

$P(E/R)$

$P(E)$ → Prevalencia de la enfermedad

$P(R)$ → Exposición al factor de riesgo

$$\text{Si } P(E) > P(R) \Rightarrow P(E/R) \in [0,1]$$

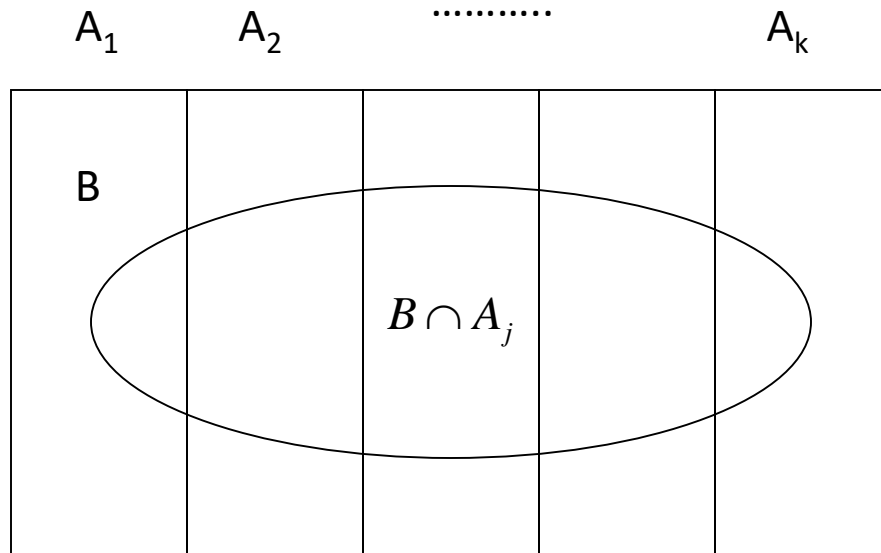
$$\text{Si } P(E) < P(R) \Rightarrow P(E/R) \in \left[0, \frac{P(E)}{P(R)}\right]$$

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} P(E) = 0.01 \\ P(R) = 0.10 \end{array} \right\} \Rightarrow P(E/R) \in [0,0.1]$$

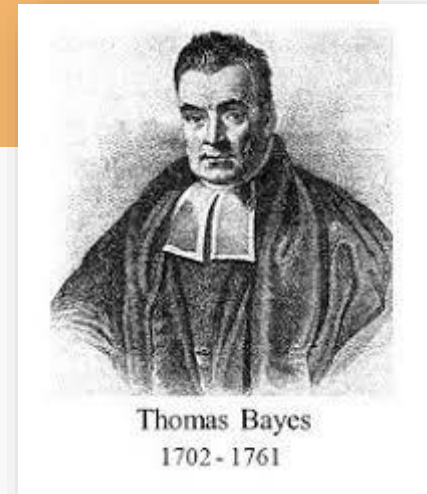
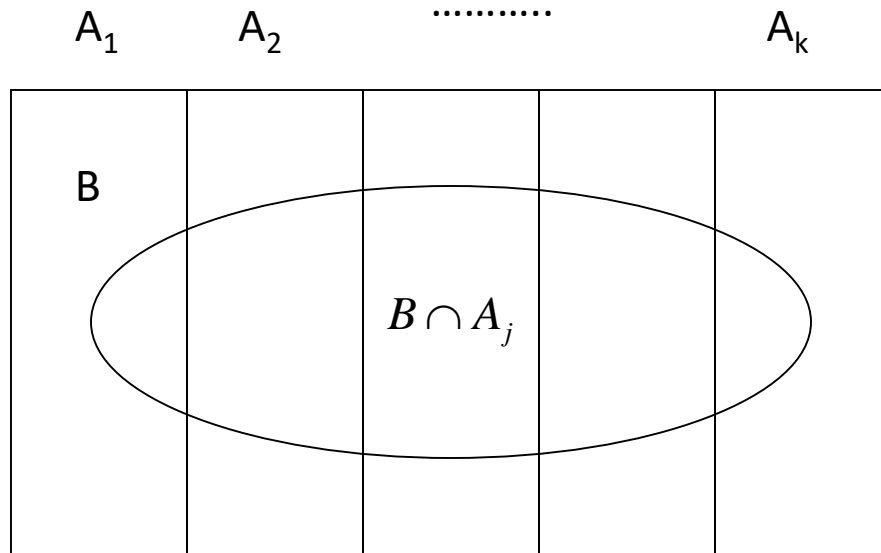
$$\left. \begin{array}{l} P(E) = 0.10 \\ P(R) = 0.01 \end{array} \right\} \Rightarrow P(E/R) \in [0,1]$$

Probabilidades totales



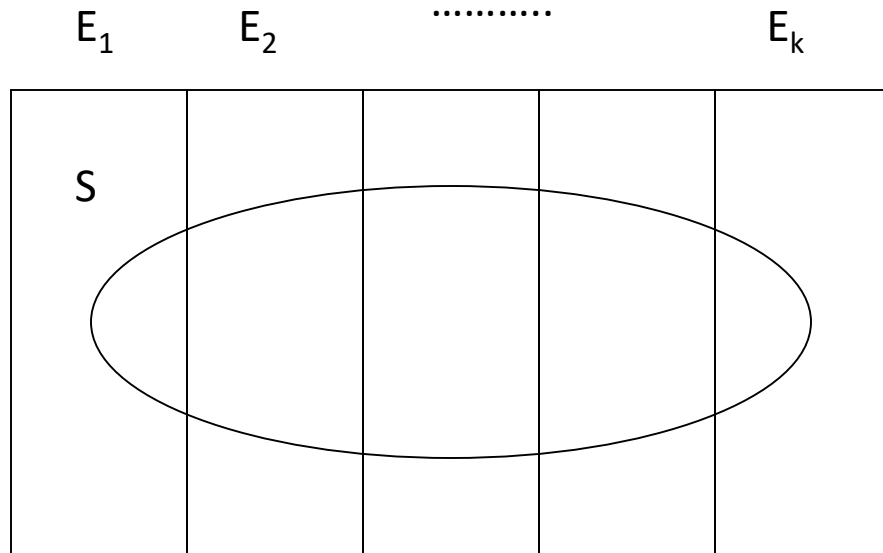
$$\begin{aligned} P(B) &= P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_k)] = \\ &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_k) = \\ &= P(B / A_1) \cdot P(A_1) + P(B / A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B / A_k) \cdot P(A_k) \end{aligned}$$

Teorema de Bayes



$$\begin{aligned} P(A_j / B) &= \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{P(B / A_j) \cdot P(A_j)}{P(B / A_1) \cdot P(A_1) + P(B / A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B / A_k) \cdot P(A_k)} \end{aligned}$$

Diagnosticar enfermedades



Conocimientos médicos

$$P(S / E_j)$$

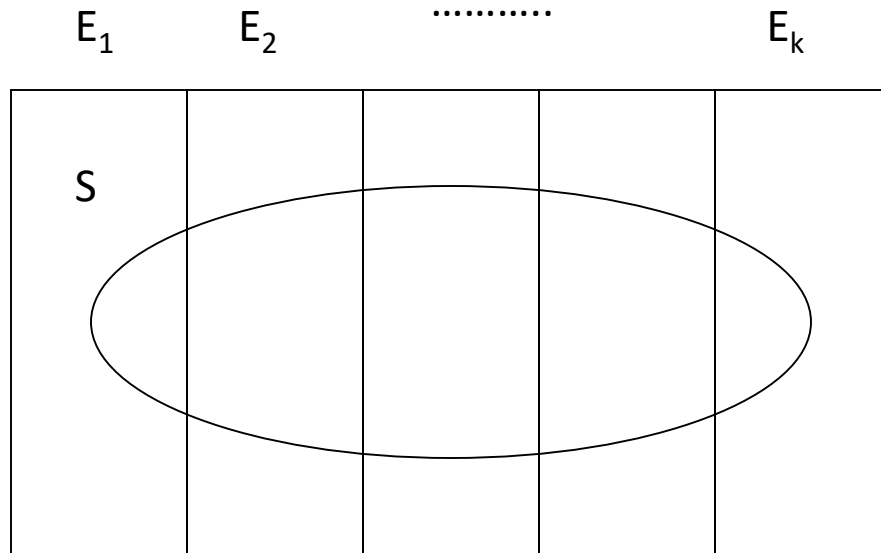
Epidemiología

$$P(E_j)$$

$$P(E_j / S) = \frac{P(E_j \cap S)}{P(S)} =$$

$$= \frac{P(S / E_j) \cdot P(E_j)}{P(S / E_1) \cdot P(E_1) + P(S / E_2) \cdot P(E_2) + \dots + P(S / E_k) \cdot P(E_k)}$$

Diagnosticar enfermedades



Conocimientos médicos

$$P(S / E_j)$$

Epidemiología

$$P(E_j)$$

$P(E_j / S) \rightarrow$ Emitir un diagnóstico en función de las probabilidades resultantes

- Diagnóstico mediante sistemas expertos
- ¿Cómo se pueden utilizar diversos criterios a la vez?

¿Cómo
podemos
asignar
valores a la
probabilidad
de un
suceso?

Conocimiento del mecanismo que
genera los sucesos

- Leyes de Mendel

Estimación a partir de
observaciones

- Estudios poblacionales
- Epidemiología

Estimación de probabilidades

Si en una muestra de una población se observa un cierto número de individuos que presentan el suceso, entonces la frecuencia relativa es un estimador de la probabilidad de dicho suceso

$$P(A) \xrightarrow{\text{Estimación}} \frac{f_A}{N}$$

Ley de los grandes números:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f_A}{N} = P(A)$$